中途打ち切りを含む寿命データの新しい信頼限界計算法の有効性検討

柴田正道　漆川賢治

Effectiveness of New Weibull Analysis Methods of Life Data Including Suspended Ones

M. SHIBATA　K. SHITSUKAWA

New Weibull analysis methods which can estimate confidence bounds of life data including suspended ones have been developed and available.

Here, calculation algorithm and effectiveness of the Fisher's Matrix Bounds method which is widely used among various analysis softwares are discussed.

Key Words: Weibull analysis, confidence bounds, maximum likelihood, fisher's matrix

1．はじめに

通常，軸受や歯車等の機械部品の信頼性を保証するためには，寿命，破損強度等を実験で評価し，得られたデータをワイブル解析する手法が用いられる．しかしながら，これまでのワイブル解析法では，信頼性を高めるためには多数の破損データを必要とし，多大な工数と費用を要してきた．なかでも，最近の転がり軸受は清浄な潤滑条件下では軸受寿命が著しく長くなってきており[1)]，多数の寿命データをとることはますます困難になってきている．

従来，試験時間の短縮を目的として中途打ち切りデータを含む試験データからでもより確かな寿命推定値を評価する解析手法がJohnsonにより提案されてきたが[2)]，その場合での信頼限界を求める方法については明確に説明されていなかった．このため，中途打ち切りを含むデータでの信頼限界の評価法については，特に国内ではこれまでまとまった解説書が公表されてこなかった．また，ユーザの機械部品に対する高信頼性へのニーズはますます強く，これまでのような90％信頼度ではなくさらに高い信頼度でのデータ解析が要求されつつある．

このような状況において，Abernethyらにより中途打ち切りを含むデータでの信頼限界を高い信頼度で推定する手法（以下Abernethyの手法と称す）（解析ソフト名Super SMITH）が開発された[3)]．しかしながら，その手法についての妥当性や計算アルゴリズムについては明確にされていない．筆者らはこれまでこの解析ソフトについて，その計算アルゴリズム検証，数学的厳密性を検討し，解析ソフトの有効性を確認してきた．

本稿では，解析ソフト内容のうち，従来のJohnson法の拡張にあたるBeta-Binominal法，最新のFisher's Matrix法による信頼限界計算法に関して筆者らの検討結果を報告する．

2．従来の信頼限界計算法（Beta-Binomial Bounds）とその限界

2.1　計算手法

基本的なワイブル解析に関しては，詳細には言及しないが，これまでに優れた文献がいくつか発行されているので，参照されたい[4)〜7)]．

従来の信頼限界計算法は，L. G. Johnsonによって開発され[2)]，Beta-Binomial Boundsと称されている[3)]．従来の信頼限界計算は，式(1)〜式(3)による．記号の説明は末尾に示す．

$$t_{j,L}=\eta\left\{\ln\left(\frac{1}{1-F_{j\{(100-C)/200\}}}\right)\right\}^{1/\beta} \quad (1)$$

$$t_{j,U}=\eta\left\{\ln\left(\frac{1}{1-F_{j\{(100+C)/200\}}}\right)\right\}^{1/\beta} \quad (2)$$

$$ {}_nC_j\,\lambda^j(1-\lambda)^{n-j}+{}_nC_{j+1}\,\lambda^{j+1}(1-\lambda)^{n-j-1}+\cdots$$
$$\cdots+{}_nC_{n-1}\,\lambda^{n-1}(1-\lambda)+{}_nC_n\,\lambda^n=A \quad (3)$$

式(3)の左辺は，順序統計量の分布の累積分布関数であり，右辺A＝0.5としたときの解λはメジアンランクとなる．

信頼限界の計算は，式(3)を解いて，式(1)，式(2)に代入すれば求められる．

しかし，ランダム中途打ち切りを含む寿命データの場合，平均順序番号が導入されて，順序番号jが整数でなくなるので，式(3)の解き方が問題となる．

筆者らの研究では，jが整数でないとき，式(3)を解くことは不可能ではないが，不合理な結果が導かれることが判明している．

そこで，Abernethyの手法を紹介する．同手法は，中途打ち切りデータの存在により整数でなくなった順序番号における各ランクの値を，全数破損データとしたとき（順序番号が整数のとき）の各ランクの値から比例補間法で算出し，式(1)，式(2)に代入する手法[8),9)]を基本としている．以下に例題として，深溝玉軸受を用いて清浄な潤滑油中で実施した寿命試験データを用い，計算手法を解説する．

表1にランダム中途打ち切りを含む寿命データの例を示す．簡単のため，C＝90（%）信頼限界を算出するものとする．

Abernethyの手法は，**表1**に示したように，まず，中途打ち切りデータも含めた全寿命データに順序番号と各ランクを割り当てる．式(3)を解かなくても，この場合は，文献[3)]に記載されている数値表を利用すればよい．

表1　全寿命データへの各ランクの割り当て
Assignment of all fatigue life data to the each rank

順序番号 j	寿命時間, h	メジアンランク	５%ランク	95%ランク
1	125	0.1294	0.0102	0.4507
2	(238)	0.3138	0.0764	0.6574
3	339	0.5000	0.1893	0.8107
4	503	0.6862	0.3426	0.9236
5	846	0.8706	0.5493	0.9898

注)(　)内中途打ち切りデータ

次に，**表2**に示したように，平均順序番号を算出して，破損データのみに割り当てる．そして，各平均順序番号に対応する各新ランクを**表1**の値により比例補間して算出する．例えば，j'＝2.25に対応する新５%ランクの値は，

0.0764＋(0.1893－0.0764)(2.25－2)/(3－2)=0.1046

と算出される．

さらに，**表2**の新５%ランクと新95%ランクを式(1)，式(2)に代入すれば，信頼限界上下限値が算出される．信頼限界を**図1**に示す．図中，△印は**表2**中の寿命時間を示し，○印は新５%，新95%ランクを示す．

従来のワイブル解析においても，新メジアンランクは同様の手法で算出されており，世界的に認知されている．５%ランクや95%ランクはメジアンランクと同じ順序統計量の各%である．したがって，Abernethyの手法はそれらを同様に扱った自然な拡張手法ということができ，理論的な矛盾はないものと考えられる．

表2　各新ランク計算結果
New ranked data

平均順序番号 j'	寿命時間, h	新メジアンランク	新５%ランク	新95%ランク
1	125	0.1294	0.0102	0.4507
	(238)			
2.25	339	0.3604	0.1046	0.6957
3.5	503	0.5931	0.2660	0.8672
4.75	846	0.8245	0.4976	0.9733

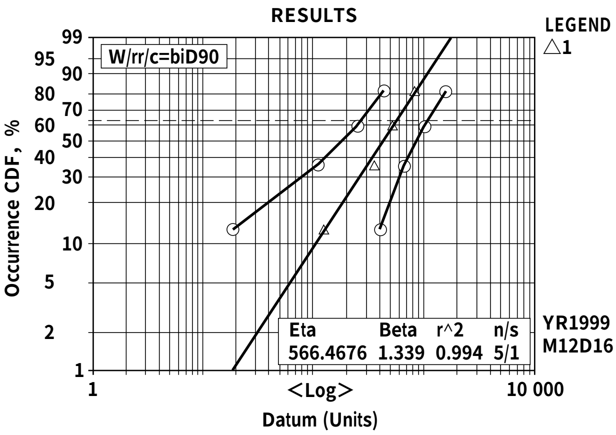

図1　従来法の信頼限界
Bata-Binominal 90% confidence bounds

2.2　Beta-Binominal Bounds法の限界

図1に示したように，従来法の信頼限界は，破損データ数に等しい点で表される．通常，それらは内挿されるが，外挿は変化無限なのでなされず，データがプロットされていない領域をこえた信頼度での信頼限界の評価が出来ない．破損データ数が少ないときは，特に計算領域は狭くなる．例えば**図1**のようにL_{10}寿命の信頼限界下限値等が計算不能となる．破損データ数が少なく，信頼性が低いからこそ，信頼性を保証するために安全を見込んで，信頼限界下限値が必要になると考えられるが，本手法ではこの問題点を解決できない．

2.3　新しい信頼限界計算法概説

Beta-Binominal Bounds法に替わる新しい信頼限界計算法が1980年以降に米国で相次いで提案された．その特長を**表3**に示す．

表3　新しい信頼限界計算法比較
New calculation methods of confidence bounds

名称	基本理論
Fisher's Matrix Bounds[10), 11)]	最尤推定値の分布が正規分布に従う性質を利用 分散の算出に局所Fisher情報行列を利用
Likelihood Ratio Bounds[10)]	尤度比統計量Λが自由度１のカイ２乗分布に従う性質を利用
Monte Carlo Simulation Bounds[12)]	Monte Carlo Simulation(乱数を用いる手法)を利用
Pivotal Bounds[10)]	Pivotal Quantityの分布の各%点を利用

同表に示すとおり，４種類開発されており，従来法(Beta-Binomial Bounds)とともに，解析ソフトSuper SMITHにて計算可能である．計算結果は，それぞれ若干異なる(条件によっては，大きく異なる)が，同４種類の計算法は従来法の問題点を解決し，以下の特徴を共通点としてもっている．

１)従来法の計算結果は，不連続点であるが，新しい４種類の計算法での計算結果は，連続曲線である．

２)従来法では，低い(高い)累積破損確率領域では計算不能であるが，新しい４種類の計算法は，すべての領域(０％＜累積破損確率＜100％)で計算可能．

なお，４種類の計算法のうち，米国では，Fisher's Matrix Boundsが最も一般的に採用されているようであり，Super SMITHでもデフォルトとなっている．そこで，以下に同手法のみ理論的な解説を行う．新しいワイブル解析法は回帰手法に最尤法を用いているため，まず最尤法について通常用いられる最小二乗法と比較して検討する．

2.4　最尤法[13), 14)]

ワイブル解析における最尤法と最小二乗法の比較を**表4**に示す．

表4　最尤法と最小二乗法の比較
Comparison of maximum likelihood and least squares method

	最尤法	最小二乗法
推定する母数	ワイブルスロープβ，特性寿命η(母集団の母数を推定)	ワイブルスロープβ，回帰直線のＹ切片ａ(標本の母数を推定)
扱う関数	対数尤度関数ln L(β，η)式(4)，式(5)	誤差 ε の２乗和Q_n(β，a)(**図3**)，式(6)，式(7)
数学条件	ln L最大(**図２**において曲面の頂点の座標が推定値) $\frac{\partial}{\partial \beta}(\ln L)=0$ $\frac{\partial}{\partial \eta}(\ln L)=0$	Ｑｎが最小 $\frac{\partial Q_n}{\partial \beta}=0$ $\frac{\partial Q_n}{\partial a}=0$
信頼性	データ数が多いとき(n≧25)最も優れた回帰手法，データ数少ないとき(n≦10)ワイブルスロープが大き目となる	データ数が少ないとき(n≦10)最尤法より優れている

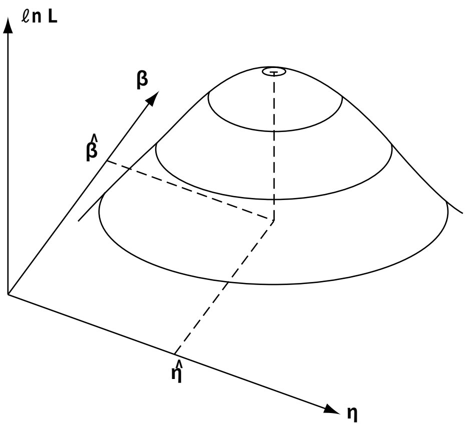

図2　最尤法の図示
The logarithmic likelihood function

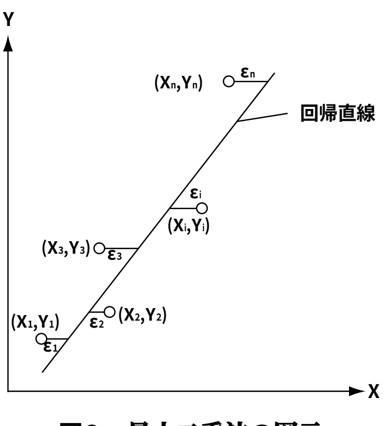

図3　最小二乗法の図示
The method of least squares

$$\ln L=\ln\left\{\prod_{i=1}^{r} f(x_i)\prod_{j=1}^{k}\{1-F(T_j)\}\right\} \tag{4}$$

$$\ln L(\beta,\eta)=r\ln\beta-r\beta\ln\eta+(\beta-1)\sum_{i=1}^{r}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}(t_i/\eta)^{\beta} \tag{5}$$

$$\varepsilon=X_n-(Y_n-a)/\beta \tag{6}$$

$$Q_n=\Sigma\,\varepsilon^2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln L)=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\ln L)=0 \tag{9}$$

最尤法による推定値は，通常，$\hat{\beta}$，$\hat{\eta}$等と表記され，最尤推定値と称される．

具体的に同値を求めるためには，式(5)を式(8)，式(9)に代入して，整理して得られる式(10)，式(11)を数値的に解けばよい．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\ln t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\ln x_i-\frac{1}{\hat{\beta}}=0 \tag{10}$$

$$\eta=\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\right\}^{1/\beta} \tag{11}$$

2.5　Fisher's Matrix Boundsの理論式

ワイブル分布に従うデータt_iを式(12)で変換したデータは，極値分布と称される分布に従う．極値分布を導入する理由は，理論式を簡潔にするためである．

$$y_i=\ln t_i \tag{12}$$

大標本(データ数が十分大きい)のとき，極値分布のp%点y_pの最尤推定値$\hat{y}_p$は，平均y_p，漸近分散$As\ \mathrm{var}\ (y_p)$ の正規分布に従う．なぜなら，最尤推定値は，真の値y_pを狙って推定するため，それを平均値とした正規分布となる．よって，$(\hat{y}_p-y_p)/\{As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)\}^{1/2}$は標準正規分布に従うため，$y_p$の信頼限界上限$y_{p,U}$は式(13)，下限$y_{p,L}$は式(14)で表現される．

$$y_{p,U}=\hat{y}_p+U(P)\{As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)\}^{1/2} \tag{13}$$

$$y_{p,L}=\hat{y}_p-U(P)\{As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)\}^{1/2} \tag{14}$$

y_pは極値分布の位置パラメータuと尺度パラメータbを用いて，式(15)，式(16)で表現される．

$$y_p=u+w_p b \tag{15}$$

$$w_p=\ln\{-\ln(1-p/100)\} \tag{16}$$

また，最尤推定値の性質より，式(17)が成立する．

$$\hat{y}_p=\hat{u}+w_p\hat{b} \tag{17}$$

$\hat{u}$，$\hat{b}$の算出法は省略するが，前述したワイブル分布の$\hat{\beta}$，$\hat{\eta}$と同様の考え方で式(4)，式(8)，式(9)により算出できる．

つづいて，漸近分散$As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)$に関しては，式(18)の関係がある．

$$As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)=As\ \mathrm{var}\ (\hat{u})+2w_p As\ \mathrm{cov}\ (\hat{u},\hat{b})+w_p^2 As\ \mathrm{var}\ (\hat{b}) \tag{18}$$

ここで，右辺の各項を行列で表現したものは，分散，共分散行列と称され，また，それが局所Fisher情報行列と称される行列I_0の逆行列に等しいという性質がある．すなわち，式(19)，式(20)で表現される．

$$\begin{bmatrix} As\ \mathrm{var}(\hat{u}) & As\ \mathrm{cov}(\hat{u},\hat{b}) \\ As\ \mathrm{cov}(\hat{u},\hat{b}) & As\ \mathrm{var}(\hat{b}) \end{bmatrix}=I_0^{-1} \tag{19}$$

$$I_0=\begin{bmatrix} -\partial^2\ln L/\partial u^2 & -\partial^2\ln L/\partial u\partial b \\ -\partial^2\ln L/\partial u\partial b & -\partial^2\ln L/\partial b^2 \end{bmatrix}_{(\hat{u},\hat{b})} \tag{20}$$

極値分布の場合，局所Fisher情報行列I_0は，式(21)，式(22)となる．

$$I_0=\frac{1}{\hat{b}^2}\begin{bmatrix} r & \sum_{i=1}^{n}\hat{z}_i\exp\hat{z}_i \\ \sum_{i=1}^{n}\hat{z}_i\exp\hat{z}_i & r+\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_i^2\exp\hat{z}_i \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\hat{z}_i=(y_i-\hat{u})/\hat{b} \tag{22}$$

よって，同式より局所Fisher情報行列を求め，その逆行列を計算すれば，式(18)，式(19)により漸近分散$As\ \mathrm{var}\ (\hat{y}_p)$が求まる．そうすれば，式(13)，式(14)により，極値分布のp%点y_pの信頼限界が計算できる．

最後に，極値分布の信頼限界を式(23)により，ワイブル分布のものに変換すれば，ワイブル分布のp%寿命L_pの信頼限界が得られる．

$$L_p=\exp(y_p) \tag{23}$$

ところで，式(13)，式(14)，式(23)をよく見てみると，p%寿命L_pのpが文字で表現されている．よって，

本計算手法における信頼限界は，明らかに，連続曲線で表され，累積破損確率pが，0＜p＜100のすべての領域をとりえることがわかる．これは，先に述べた従来の計算手法（Beta-Binomial Bounds）のものにおける，不連続点の集まり，累積破損確率の領域が最短寿命点から最長寿命点の間となるといった性質と大きく異なる点である．

2.6　新しい信頼限界計算法の問題点

これまで，Abernethyの手法による新しい信頼限界計算法のうち，Fisher's Matrix Bounds法について述べてきた．この手法は高い信頼度での信頼限界が求められる点で実用上意義が大きい．しかしながら，筆者らの検討では以下に示した問題点，疑問点も存在することが分かった．

１）Abernethyの手法は最尤法を理論的基礎としているが，最尤法は**表４**に記したとおり，通常の寿命データのように破損データ数が少ない（r≦10）ときには，ワイブルスロープβが大き目に推定される．

２）Fisher's Matrix Bounds法は，大標本のとき（データ数が十分大きい）という前提に基づき構築されている．破損データ数が少ない（ｒ≦10）ときに適用するのは合理的か．

３）Super SMITHの解説書[3)]に記載されている実際の計算例では，10個の破損データに対し，最尤法ではなく，最小二乗法を適用して，Fisher's Matrix Boundsの信頼限界を計算している．データ数が少ないときは，最尤法より最小二乗法の方が回帰精度が優れているとされることから，最小二乗法が使用されたと推定されるがFisher's Matrix Bounds法は，最尤法を理論的基礎においているので，この扱いは大胆な手法である．

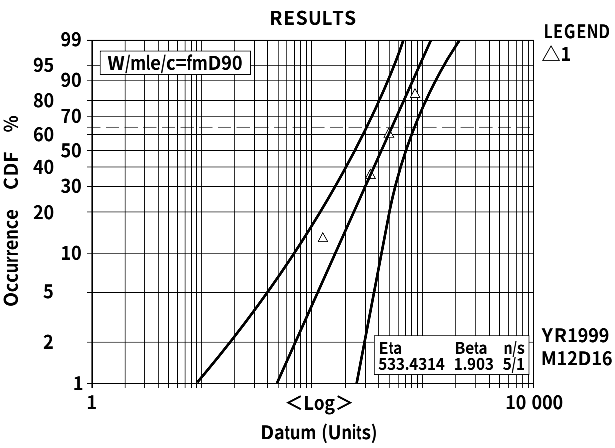

図4(a)　最尤法によるFisher's Matrix Bounds
The Fisher's matrix 90% confidence bounds by the maximum likelihood method

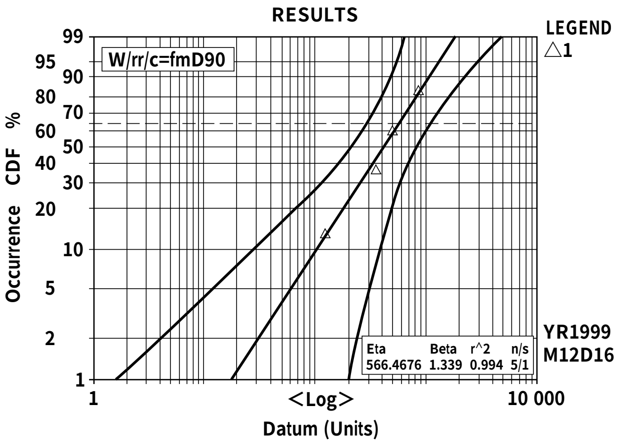

図4(b)　最小二乗法によるFisher's Matrix Bounds
The Fisher's matrix 90% confidence bounds by the method of least squares

前掲の**表１**に示した軸受寿命データについて，筆者らが最尤法および最小二乗法を用いてFisher's Matrix Bounds法で解析した結果を**図4(a)**，**(b)**に示す．この場合，破損データ数は４個と少ないので，最尤法を用いた場合，ワイブルスロープは1.9と最小二乗法を用いた場合の1.3に比べて大きく計算される．また，L_{10}寿命での90%信頼限界下限値は最尤法を用いた場合は63時間と最小二乗法での28時間より長寿命側に推定される．

このように，破損データ数が少ない場合においては，Fisher's Matrix Bounds法の適用の妥当性検討に課題が残されている．実用面ではより少ないデータからの精度の高い解析が必要とされることから，ここに示した適正データ数の問題は今後解決が必要である．

４．まとめ

中途打ち切りデータを含む場合でのワイブル解析における信頼限界の計算法の新しい手法について，従来法と最近の開発手法のうち，Fisher's Matrix Bounds法を取上げて検討した結果を以下にまとめる．

１）従来法はJohnson手法の自然な拡張であるが，データがWeibullチャートにプロットされていない領域をこえた信頼度での信頼限界の評価はできない．

２）Fisher's Matrix Bounds法は理論的には最尤推定値の分布が正規分布に従う性質を利用し，分散の算出に局所Fisher情報行列を利用するものである．
　本法では，信頼限界はすべての信頼度範囲において連続曲線として求められ，実用上

その有効性は高い．

3）しかしながら，データ数の少ない場合に回帰法に最小二乗法が使われており，理論との不都合がある．今後，適正データ数の問題を解決する必要がある．

（記号の説明）

（記号）

a	：回帰直線のy切片
A	：式(3)で（100－C）/2%ランクを求めるとき（100－C）/200 （100＋C）/2%ランクを求めるとき（100＋C）/200
$As\,\mathrm{cov}$	：Asymptotic Covariance（漸近共分散：データ数大のときの共分散）
$As\,\mathrm{var}$	：Asymptotic Variance（漸近分散：データ数大のときの分散）
b	：極値分布の尺度パラメータ
$\hat{b}$	：bの最尤推定値
C	：信頼水準（%）
${}_nC_j$	：２項係数（＝n！／j！（n－j）！）
exp	：指数関数
$f(x)$	：確率密度関数
$F(t)$	：累積破損確率
$F_{j\{(100-C)/200\}}$	：j番めの寿命データの（100－C）/2%ランク
$F_{j\{(100+C)/200\}}$	：j番めの寿命データの（100＋C）/2%ランク
I_0	：局所Fisher情報行列
I_0^{-1}	：局所Fisher情報行列の逆行列
j	：寿命データの順序番号
j'	：平均順序番号
k	：中途打ち切りデータ数（r＋k＝n：全データ数）
ln	：自然対数
ln L	：対数尤度関数
$\ln L(\beta,\eta)$	：２母数ワイブル分布の対数尤度関数
L_p	：ワイブル分布のp%寿命
n	：中途打ち切りも含めた全寿命データ数
N	：試験個数
p	：各%点
P	：標準正規分布の両側確率（＝1－C/100）
Q_n	：誤差の２乗和
r	：破損データ数
R	：信頼度（１－累積破損確率）
u	：極値分布の位置パラメータ

（記号）

$\hat{u}$	：uの最尤推定値
$U(P)$	：標準正規分布の片側（100Ｐ／２）%点
t_d	：試験時間
t_i	：破損データと中途打ち切りデータを含めた全寿命データ
T_j	：中途打ち切りデータ
$t_{j,L}$	：j番めの寿命データのＣ%信頼限界下限
$t_{j,U}$	：j番めの寿命データのＣ%信頼限界上限
w_p	：式(18)で定義される値
x_i	：破損データ
X_n	：ワイブル確率紙上のデータ点のX座標
y_i	：極値分布データ
Y_n	：ワイブル確率紙上のデータ点のY座標
y_p	：極値分布のp%点
$\hat{y}_p$	：y_pの最尤推定値
$y_{p,U}$	：y_pの信頼限界上限
$y_{p,L}$	：y_pの信頼限界下限
$\hat{z}_i$	：式(24)で定義される値
α	：危険率
β	：ワイブルスロープ
$\hat{\beta}$	：βの最尤推定値
η	：特性寿命（＝$L_{63.2}$）
$\hat{\eta}$	：ηの最尤推定値
λ	：j番目の寿命データの各ランクの値（式(3)の解）
ε	：誤差
Π	：総積

参考文献

1）K. Shitsukawa, M. Shibata, Y. Ohno and T. M. Johns：SAE Paper no. 972710 (1997).
2）L. G. Johnson：The Statistical Treatment of Fatigue Experiments, Elsevier Publishing Company (1964).
3）R. B. Abernethy：The New Weibull Handbook 2nd edition, (1994) distributed by SAE.
4）立石佳男：Koyo Engineering Journal, no. 130 (1986) 47.
5）佐藤昌夫，岡本純三：ベアリング, vol. 28, no. 5 (1985) 2.
6）佐藤昌夫，岡本純三：ベアリング, vol. 28, no. 6 (1985) 4.
7）佐藤昌夫：トライボロジスト, vol. 39, no. 8 (1994) 49.
8）L. Charles, et al：Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments, McGraw-Hill, (1973).
9）K. C. Kapur and L. R. Lamberson：Reliability in Engineering Design, John Wiley, (1977).
10）J. F. Lawless：Statistical Models & Methods for Lifetime Data, John Wiley, (1982).
11）W. Nelson, 奥野忠一監訳：寿命データの解析, 日科技連出版社（1988）.
12）W. Q. Meeker, et al：Statistical Methods for Reliability, John Wiley (1998).
13）河田竜夫，国沢清典：現代統計学・上巻改訂版，廣川書店（1967）.
14）市田　嵩，鈴木和幸：信頼性の分布と統計，日科技連出版社（1984）.

筆　者


柴田正道* M. SHIBATA　漆川賢治** K. SHITSUKAWA

*　総合技術研究所　基礎技術研究所　軸受技術開発部
**　軸受事業本部　軸受技術センター　自動車ユニット技術部